[redacted] - DM 13 niveau 3 :

Partie 1 : étude de quelques exemples :

1) En deux lancers, il ne peut survenir qu'un seul changement (ou aucun). Alors :

$X_2(\Omega) = \{0 ; 1\}$

D'où : $\cdot\ P(X_2 = 0) = P(F_1F_2 \cup P_1P_2)$ } les événements P_1P_2 et F_1F_2 sont incompatibles

$= P(F_1F_2) + P(P_1P_2)$ } les événements P_1 et P_2, et F_1 et F_2, sont indépendants

$= P(F_1)P(F_2) + P(P_1)P(P_2)$

$$\boxed{P(X_2=0) = q^2 + p^2}$$

$\cdot\ P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2=0)$

$= 1 - q^2 - p^2$

$= 1 - q(1-p) - p(1-q)$

$= 1 - q - p + 2pq$

$$\boxed{P(X_2=1) = 2pq}$$

2) (a) Il peut y avoir 0, 1, ou 2 changements en trois lancers : $X_3(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}$

Alors : $\cdot\ P(X_3 = 0) = P(P_1P_2P_3 \cup F_1F_2F_3)$ } les événements $P_1P_2P_3$ et $F_1F_2F_3$ sont incompatibles

$= P(P_1P_2P_3) + P(F_1F_2F_3)$ } les événements P_1, P_2 et P_3, et F_1, F_2 et F_3 sont indépendants

$= P(P_1)P(P_2)P(P_3) + P(F_1)P(F_2)P(F_3)$

$$\boxed{P(X_3=0) = p^3 + q^3}$$

$\cdot\ P(X_3 = 2) = P(P_1F_2P_3 \cup F_1P_2F_3)$ } les événements $P_1F_2P_3$ et $F_1P_2F_3$ sont incompatibles

$= P(P_1F_2P_3) + P(F_1P_2F_3)$ } les événements P_1, F_2 et P_3, et F_1, P_2 et F_3 sont indépendants

$= P(P_1)P(F_2)P(P_3) + P(F_1)P(P_2)P(F_3)$

$P(X_3 = 2) = pqp + qpq = pq(p+q) \Rightarrow \boxed{P(X_3 = 2) = pq}$

$\cdot\ P(X_3 = 1) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 2)$

$= 1 - p^3 - q^3 - pqp - qpq$

$= 1 - (1-q)p^2 - (1-p)q^2 - pqp + qpq$

$= 1 - p^2 - q^2$

$\boxed{P(X_3 = 1) = 2pq}$

(b) Le support de X_3 est fini ($\{0;1;2\}$) donc la variable aléatoire admet un moment d'ordre 1 et :

$E(X_3) = P(X_3 = 1) + 2P(X_3 = 2)$

$= 2pq + 2pq$

$\boxed{E(X_3) = 4pq}$

X_3 admet un moment d'ordre 2 ($X_3(\Omega)$ fini) et :

$E(X_3^2) = P(X_3 = 1) + 4P(X_3 = 2)$

$= 2pq + 4pq$

$= 6pq$

D'après la formule de Koenig-Huygens, on a :

$V(X_3) = E(X_3^2) - (E(X_3))^2$

$= 6pq - 16p^2q^2$

$\boxed{V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)}$

3) (a) Pour les prochains calculs, on rappelle : les lancers sont indépendants, et chaque série de lancers est unique. Les séries de lancer sont incompatibles.

En 4 lancers, il peut y avoir de 0 à 3 changements : $X_4(\Omega) = \{0;1;2;3\}$

• D'abord, $P(X_4=0) = P(P_1P_2P_3P_4 \cup F_1F_2F_3F_4) \Rightarrow \boxed{P(X_4=0) = p^4+q^4}$

• Ensuite, $P(X_4=1) = P(P_1P_2P_3F_4 \cup P_1P_2F_3F_4 \cup P_1F_2F_3F_4 \cup F_1P_2P_3P_4 \cup F_1F_2P_3P_4 \cup F_1F_2F_3P_4)$

$$= p^3q + p^2q^2 + pq^3 + qp^3 + q^2p^2 + q^3p$$

$$\boxed{P(X_4=1) = 2pq(p^2+pq+q^2)}$$

• $P(X_2=2) = P(P_1P_2F_3P_4 \cup P_1F_2P_3P_4 \cup F_1F_2P_3F_4 \cup F_1P_2F_3F_4 \cup F_1P_2P_3F_4 \cup P_1F_2F_3P_4)$

$$= p^3q + p^3q + q^3p + q^3p + p^2q^2 + p^2q^2$$

$$\boxed{P(X_4=2) = 2pq(p^2+pq+q^2)}$$

• Enfin, $P(X_4=3) = P(P_1F_2P_3F_4 \cup F_1P_2F_3P_4)$

$$= p^2q^2 + p^2q^2$$

$$\boxed{P(X_4=3) = 2p^2q^2}$$

(b) On a $X_4(\Omega)$ fini donc X_4 admet un moment d'ordre 1 ; l'espérance vaut :

$$E(X_4) = P(X_4=1) + 2P(X_4=2) + 3P(X_4=3)$$

$$= 6pq(p^2+pq+q^2) + 6p^2q^2$$

$$= 6pq(p^2+2pq+q^2)$$

$$= 6pq(p+q)^2 \quad \text{or } p+q=1$$

$$\boxed{E(X_4) = 6pq}$$

Partie 2 : étude du cas $p \neq q$:

1) $[X_n=0]$: " il n'y a aucun changement en n lancers " : autrement dit, on obtient que des piles ou que des faces.

Donc $P(X_n=0) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i \cup \bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)$ union d'événements incompatibles, intersection d'événements indépendants

$\Leftrightarrow \boxed{P(X_n=0) = p^n + q^n}$

2)

On a : $[X_n = 1] = \bigcup_{i=1}^{n-1} (P_1 P_2 \dots P_i F_{i+1} F_{i+2} \dots F_n) \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (F_1 F_2 \dots F_i P_{i+1} P_{i+2} \dots P_n)$

Or, les événements $(P_1 P_2 \dots P_i F_{i+1} \dots F_n)_{i \in [\![1;n-1]\!]}$ sont incompatible. De même pour $(F_1 F_2 \dots F_i P_{i+1} \dots P_n)_{i \in [\![1;n-1]\!]}$

On sait également que les lancer sont indépendants, d'où :

$$P(X_n = 1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (P_1 P_2 \dots P_i F_{i+1} F_{i+2} \dots F_n) \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} (F_1 F_2 \dots F_i P_{i+1} P_{i+2} \dots P_n)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P(P_1 P_2 \dots P_i F_{i+1} \dots F_n) + \sum_{i=1}^{n-1} P(F_1 F_2 \dots F_i P_{i+1} P_{i+2} \dots P_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} p^i q^{n-i} + \sum_{i=1}^{n-1} q^i p^{n-i}$$

$$= q^n \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^i + p^n \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i$$

$$= q^n \times \frac{p}{q} \left(\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}}{1-\frac{p}{q}}\right) + p^n \times \frac{q}{p} \left(\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\frac{q}{p}}\right)$$

$$= q^{n-1} \times p \left(\frac{\frac{q^{n-1}-p^{n-1}}{q^{n-1}}}{\frac{q-p}{q}}\right) + p^{n-1} \times q \left(\frac{\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p^{n-1}}}{\frac{p-q}{p}}\right)$$

$$= \frac{pq}{q-p} (q^{n-1} - p^{n-1}) + \frac{pq}{1-p} (q^{n-1} - p^{n-1})$$

$$\boxed{P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p} (q^{n-1} - p^{n-1})}$$

3) • Soit n pair, on a :

$$[X_n = n-1] = F_1 P_2 F_3 P_4 F_5 P_6 \dots F_{n-1} P_n \cup P_1 F_2 P_3 F_4 P_5 F_6 \dots P_{n-1} F_n$$

$$= \bigcap_{i=1}^{\frac{n}{2}} (F_{2n-1} P_{2n}) \cup \bigcap_{i=1}^{\frac{n}{2}} (P_{2n-1} F_{2n})$$

Sachant les lancers indépendants et les deux séries de lancer incompatible :

$$P(X_n = n-1) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\frac{n}{2}} (F_{2i-1} P_{2i}) \cup \bigcap_{i=1}^{\frac{n}{2}} (P_{2i-1} F_{2i})\right)$$

$$= (qp)^{\frac{n}{2}} + (pq)^{\frac{n}{2}}$$

$$\boxed{P(X_n = n-1) = 2(pq)^{\frac{n}{2}} \quad | \; n \text{ pair}}$$

• Soit n impair, on a :

$$[X_n = n-1] = F_1 P_2 F_3 P_4 \dots F_{n-2} P_{n-1} F_n \cup P_1 F_2 P_3 F_4 \dots P_{n-2} F_{n-1} P_n$$

$$= \bigcap_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (F_{2i-1} P_{2i}) \cap F_n \quad \cup \quad \bigcap_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (P_{2i-1} F_{2i}) \cap P_n$$

Sachant les lancers indépendants et les deux séries de lancers incompatibles :

$$P(X_n = n-1) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (F_{2i-1} P_{2i}) \cap F_n \quad \cup \quad \bigcap_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (P_{2i-1} F_{2i}) \cap P_n \right)$$

$$= (pq)^{\frac{n-1}{2}} \times q + (pq)^{\frac{n-1}{2}} \times p$$

$$= (p+q)(pq)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\boxed{P(X_n = n-1) = (pq)^{\frac{n-1}{2}} \quad | \; n \text{ impair}}$$

4) <u>Pour X_3</u>

À partir des formules on trouve :

- $\boxed{P(X_3 = 0) = p^3 + q^3}$

- $P(X_3 = 1) = \dfrac{2pq}{q-p}(q^2 - p^2) = \dfrac{2pq}{q-p}\left((1-p)^2 - p^2\right)$

$$= \frac{2pq}{q-p}(1-2p) \quad \Big| \; 1-2p = 1-p-(1-q) = q-p$$

$$\boxed{P(X_3 = 1) = 2pq}$$

- $P(X_3 = 2) = (pq)^{\frac{3-1}{2}} \Rightarrow \boxed{P(X_3 = 2) = pq}$ (3 impair)

On retrouve bien les résultats de la partie 1.

<u>Pour X_4 :</u>

- $\boxed{P(X_4 = 0) = p^4 + q^4}$

- $P(X_4 = 1) = \dfrac{2pq}{q-p}(q^3 - p^3)$

$$= \frac{2pq}{q-p}(q-p)(p^2 + pq + q^2)$$

$$\boxed{P(X_4 = 1) = 2pq(p^2 + pq + q^2)}$$

- $P(X_4 = 3) = 2(pq)^{\frac{4}{2}}$ (4 pair)

$$\Leftrightarrow \boxed{P(X_4 = 3) = 2p^2q^2}$$

Rq : $P(X_4 = 2) = 1 - P(X_4 = 0) - P(X_4 = 1) - P(X_4 = 3)$

$$= 1 - p^4 - q^4 - 2p^2q^2 - 2pq(p^2 + pq + q^2)$$

$$= 1 - p^2(1-q)^2 - q^2(1-p)^2 - 2pq(p^2+2pq+q^2)$$

$$= 1 - p^2 + 2p^2q - p^2q^2 - q^2 + 2q^2p - q^2p^2 - 2pq(p^2+2pq+q^2)$$

$$= 2pq(1 + p + q - pq - p^2 - q^2 - 2pq)$$

$$= 2pq(2pq + 1 - 3pq)$$

$1 - p^2 - q^2 = 2pq$

$\Leftrightarrow p^2 + 2pq + q^2 = 1$

$$\boxed{P(X_4 = 2) = 2pq(p^2 + pq + q^2)}$$

À nouveau, on retrouve les résultats de la partie 1.

5) On peut écrire : $\boxed{X_n = \sum_{k=2}^{n} Z_k}$, puisque X_n compte le nombre de changements en n lancers.

Or on a :

$P(Z_k = 1) = P([P_{k-1} \cap F_k] \cup [F_{k-1} \cap P_k])$ | lancers indépendants et évènements incompatibles

$= pq + qp$

$\boxed{P(Z_k = 1) = 2pq}$; $\boxed{P(Z_k = 0) = 1 - 2pq}$

D'où, sachant $Z_k(\Omega) = \{0;1\}$, Z_k admet un moment d'ordre 1 et :

$E(Z_k) = 0 \times P(Z_k = 0) + 1 \times P(Z_k = 1) \Rightarrow \boxed{E(Z_k) = 2pq}$

Or $X_n = \sum_{k=2}^{n} Z_k$ d'où :

$$E(X_n) = E\left(\sum_{k=2}^{n} Z_k\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} E(Z_k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} 2pq$$

$$\boxed{E(X_n) = 2(n-1)pq}$$

Partie 3 : étude de $p = q$:

$\begin{cases} p + q = 1 \\ p = q \end{cases} \Rightarrow p = q = \frac{1}{2}$

1) Pour X_3, on a $X_3(\Omega) = [\![0;2]\!]$ et :

$\cdot\ P(X_3 = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow P(X_3 = 0) = \frac{1}{4}$, or $\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

· $P(X_3=1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, or $\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

· $P(X_3=2) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, or $\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$

On a alors $P(X_3=k) = \binom{2}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$

Donc $\boxed{X_3 \sim \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)}$

Pour X_4, on a $X_4(\Omega) = [\![0;3]\!]$ et

· $P(X_4=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$ or $\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

· $P(X_4=1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ or $\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

· $P(X_4=2) = P(X_4=1) = \frac{3}{8}$ or $\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

· $P(X_4=3) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$ or $\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Donc $P(X_4=k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$:

$\boxed{X_4 \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)}$

2) Raisonnons par récurrence :

· $\mathcal{P}_n : \{ X_n \sim \mathcal{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right) \}$

· Initialisation : on a bien $X_2(\Omega) = \{0;1\}$ et

$P(X_2=k) = \binom{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{1-k}$ (en réalité X_2 suit une loi de Bernoulli, donc une loi binomiale de paramètres 1 et $\frac{1}{2}$. $\mathcal{P}_2$ est vraie.

· Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, montrons alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

On sait $X_{n+1}(\Omega) = [\![0;n]\!]$, il peut y avoir entre 0 et n changements.

Or $P(X_{n+1}=k) = P((X_n = k \cap Z_{n+1}=0) \cup (X_n = k-1 \cap Z_{n+1}=1))$ } les lancers étant indépendants et les séries de lancers étant incompatibles, on a :

$$= \frac{1}{2}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} + \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k+1}$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \binom{n}{k}$$ (par la formule du triangle de Pascal)

$$P(X_{n+1} = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Alors, $X_{n+1} \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ //

- Alors, $\mathcal{P}_n$ étant initialisée et héréditaire, on a bien :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n > 2,\ X_n \sim \mathcal{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right)}$$